

Aplicação de Processamento Paralelo no Projeto de Aterramentos Encapsulados

Maria Helena Murta Vale *

Humberto de Aquino Silveira*

Silvério F. Visacro*

Liria Matsumoto Sato +

*LRC – Lightning Research Center

UFMG- CPDEE – Universidade Federal de Minas Gerais

Av. Antônio Carlos 6 627 – Pampulha

CEP 31270.901 – Belo Horizonte – Brasil

Tel: 55-31-499-4872

e-mail: {mhelena, visacro}@cpdee.ufmg.br

+ PCS- Departamento de Engenharia de Computação e Sistemas Digitais

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Av. Prof. Luciano Gualberto, travessa 3, no 158

CEP. 05508-900 - São Paulo, SP

tel: 55-11-3818-5617

e-mail: liria@pcs.usp.br

Resumo

Este trabalho apresenta investigações sobre a aplicação de processamento paralelo no projeto de aterramentos encapsulados. O grau de paralelismo da tarefa e o elevado tempo computacional gasto pelo processamento sequencial motivam a utilização da computação de alto desempenho na sua solução. A exploração do paralelismo se apresenta sob diferentes enfoques e, neste trabalho, são apresentados os ganhos obtidos na geração da matriz de coeficientes geométricos, que descreve as relações básicas entre as correntes e potenciais no sistema. A modelagem de aterramento tem sido objeto de pesquisa na Universidade Federal de Minas Gerais e o algoritmo paralelo foi elaborado utilizando-se a ferramenta computacional CPAR, que oferece recursos para paralelização e foi desenvolvida na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

Palavras-chave: processamento paralelo, alto desempenho, aterramento encapsulado, programação paralela.

1. Introdução

A utilização de técnicas de alto desempenho, em especial aquelas relativas ao processamento paralelo, tem sido cada vez mais intensa na solução de questões relativas aos Sistemas de Energia Elétrica (SEE) que requerem grande esforço computacional.

Com o uso de técnicas de paralelismo, novas perspectivas se apresentam para o desenvolvimento de software aplicado à engenharia, possibilitando a solução de problemas que não poderiam ser resolvidos, de forma eficiente, através de abordagens convencionais. No entanto, o desenvolvimento de software, usando lógica paralela, requer toda uma filosofia própria, diferente daquela adotada nos programas com lógica sequencial.

O grupo de Sistemas Elétricos de Potência da UFMG vem investigando a elaboração de algoritmos paralelos para a solução de problemas da Engenharia Elétrica (no *Laboratório de Computação de Alto Desempenho*). Na USP, vem sendo desenvolvida a ferramenta Cpar, cujas características se mostram extremamente interessantes para o desenvolvimento das aplicações.

Neste trabalho¹, são apresentadas as investigações relativas à aplicação de processamento paralelo na solução do *Cálculo de Aterramentos Encapsulados*. Várias são as *motivações* que levam ao desenvolvimento desta pesquisa. Dentre elas podem ser citados o *grande esforço computacional* apresentado pela aplicação, o *elevado grau de paralelismo da tarefa*, sugerindo a utilização de lógica paralela, e a possibilidade de *integração de pesquisas* realizadas pelas equipes da Universidade Federal de Minas Gerais e da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

Com relação ao *grau de paralelismo* presente no cálculo do aterramento encapsulado, é interessante observar que a aplicação favorece a implementação de diferentes abordagens, sob o ponto de vista de exploração do paralelismo. Algumas delas são apontadas no texto e estão sendo avaliadas pelos autores. Porém, o enfoque principal no presente trabalho é dado ao aumento do desempenho na *construção do sistema de equações lineares* presente na aplicação.

Para cumprir o objetivo de mostrar os resultados da aplicação de processamento paralelo no cálculo de aterramentos elétricos, este artigo está estruturado da seguinte maneira: após esta introdução, o problema elétrico envolvido na aplicação é apresentado no item 2; o item 3 aborda as formas de se explorar o grau de paralelismo presente na tarefa, indicando aquele tratado neste texto; o item 4 se dedica à caracterização da ferramenta Cpar e da sua aplicação ao cálculo do aterramento; o item 5 apresenta os resultados das simulações bem como sua análise; finalmente, o item 6 traz as conclusões do trabalho.

2. Aterramentos Encapsulados - Conceitos Básicos

Constitui-se em um importante componente do SEE, o Sistema de Aterramento Elétrico. Expressando de uma forma bastante simplificada, a função básica deste sistema é estabelecer uma ligação condutiva entre a instalação elétrica e o solo

Basicamente, um sistema de aterramento é constituído por três elementos, com funções distintas, assim identificados [1]: eletrodo de aterramento (qualquer corpo metálico enterrado no solo), cabos e conexões (realizam a ligação metálica entre a instalação elétrica e os eletrodos de aterramento) e solo circunvizinho (elemento responsável pela absorção e dissipação de correntes provenientes da instalação elétrica).

¹ Esta pesquisa foi financiada pela FINEP/RECOPE

Historicamente, as partes metálicas dos sistemas hidráulicos eram empregadas como um sistema de aterramento alternativo. Esta prática constituía uma solução complementar valiosa para redução da impedância de aterramento de instalações elétricas residenciais e industriais. A partir da década de 60, iniciou-se uma intensa substituição dos componentes metálicos de sistemas hidráulicos por materiais isolantes (PVC). Desde então, esta prática foi reduzida e houve necessidade de se desenvolver outras soluções para melhoria do desempenho de aterramentos. Isto justificou a presente prática de conectar os terminais de terra aos componentes metálicos do concreto, os quais podem estar presentes nas fundações de construções. Tal sistema é usualmente designado por "eletrodo de aterramento encapsulado em concreto" ou, simplesmente, "aterramento encapsulado"[2].

Embora existam indicações da eficiência desta prática para várias aplicações, a avaliação quantitativa do desempenho deste tipo de aterramento não é tarefa simples. Neste sistema, os eletrodos de aterramento não se encontram em contato direto com o solo, mas inseridos num invólucro de concreto. A ligação entre os eletrodos de aterramento encapsulados e a instalação elétrica é feita soldando-se a eles uma peça metálica que possa servir como um terminal de acesso. O contato com o solo é feito indiretamente através dos invólucros de concreto, que se constitui num material de baixa resistividade e de propriedades higroscópicas. A configuração correspondente (Figura 1) apresenta certas complexidades, associadas, sobretudo, à presença de três meios materiais diferentes (condutor, concreto e solo) e à geometria tipicamente não regular.

Este quadro estimulou os autores a investigar e desenvolver uma ferramenta computacional capaz de realizar os cálculos necessários em projetos de aterramentos desta natureza. As características do problema, envolvendo superfícies condutoras e uma superfície de separação entre o concreto e o solo sugeriram o emprego do método de elementos de fronteira.

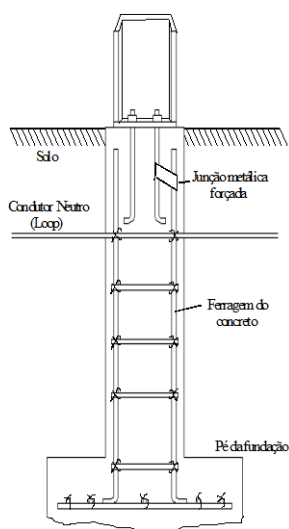


Figura 1: Exemplo de configuração de aterramento encapsulado

3. Exploração do Paralelismo no Projeto de Aterramentos Encapsulados

O objetivo da modelagem dos aterramentos encapsulados consiste na determinação da resistência de aterramento da configuração e dos potenciais estabelecidos na superfície do solo durante o fluxo de corrente pelo aterramento. Estes constituem os dois *parâmetros práticos de*

interesse no projeto de aterramentos elétricos. Para determiná-los, a modelagem deve calcular, como parâmetros intermediários, a corrente dispersa por cada segmento metálico (ferragem) e a corrente na superfície do concreto. Por formulação direta obtém-se a resistência e a distribuição de potenciais a partir dos parâmetros intermediários.

A modelagem e a formulação do problema do aterramento são bastante complexas. Sendo assim, optou-se por descrevê-las no Apêndice A e, neste item, indicar os passos básicos envolvidos no projeto de aterramento encapsulado, com o objetivo de discutir a aplicação de processamento paralelo ao mesmo.

No que interessa a este trabalho, e conforme pode-se observar pela descrição apresentada no apêndice, o projeto do aterramento envolve a solução de um sistema de equações lineares do tipo

$$Ax = b \quad (1)$$

Sendo

A: matriz dos *Coefficientes de Carga* calculada de acordo com a equação A.12 (apêndice A)

x: vetor de *Densidade de Carga* (η)

b: vetor de *Potencial dos Elementos do Eletrodo* (V)

O projeto final do aterramento envolve, normalmente, a análise de diferentes configurações iniciais. Para cada configuração, um sistema de equações lineares do tipo (1) é criado e solucionado e são calculados a resistência de aterramento e os potenciais na superfície do solo. Tais parâmetros são utilizados para a análise de cada configuração, a qual dirá se esta é adequada ou se será necessário otimizá-la.

A figura 2 mostra o fluxograma contendo os passos básicos do projeto de aterramento abordado neste trabalho.

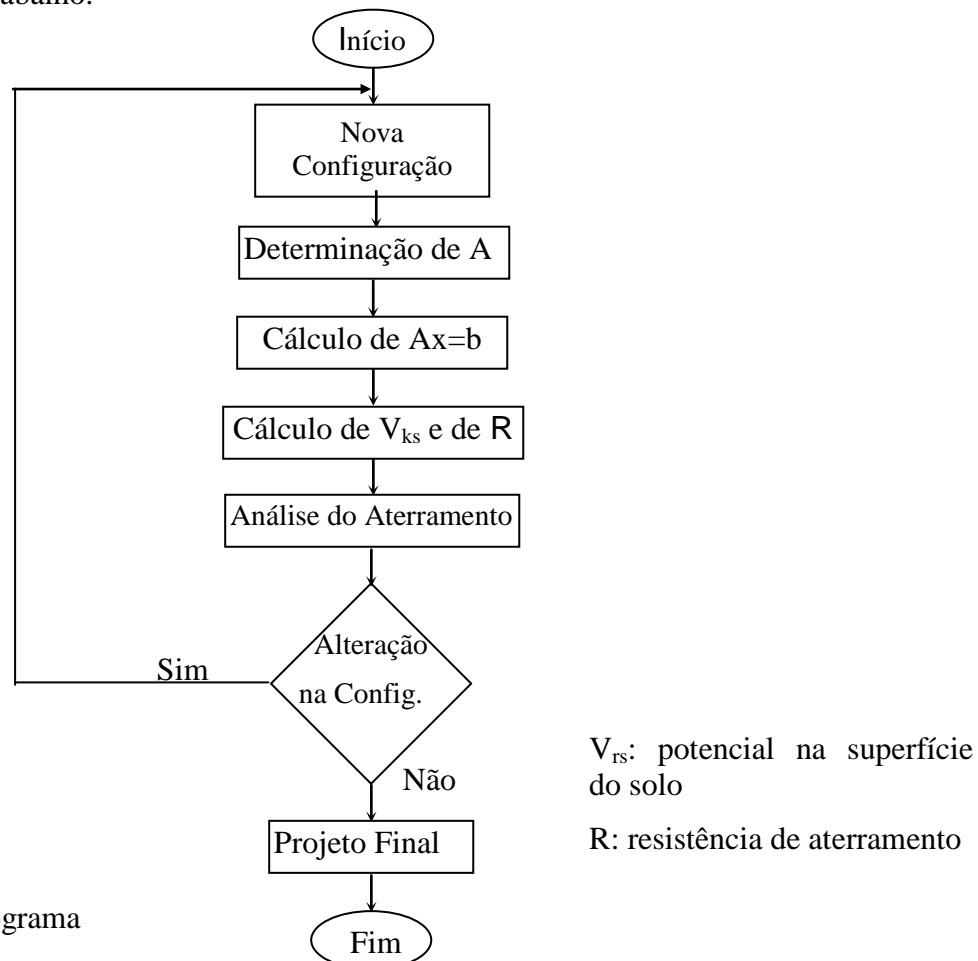


Figura 2: Fluxograma

Investigando o cálculo do aterramento, com respeito à exploração do paralelismo, verifica-se que este pode ser aplicado em dois pontos:

- Na montagem da matriz A;
- Na solução do sistema linear $Ax=b$.

É importante notar que estes não são excludentes, ou seja, podem ser explorados em conjunto e vêm sendo investigados pelos autores. Neste trabalho, optou-se por apresentar os resultados da pesquisa relativa ao paralelismo aplicado à criação da matriz A, pois é esta a etapa que apresenta os maiores desafios, sendo específica da própria aplicação.

As maiores motivações para o desenvolvimento deste estudo foram o elevado grau de paralelismo da tarefa e o tempo computacional gasto pela versão sequencial do algoritmo. Caracterizando o grau de paralelismo, tem-se que todos os elementos da matriz podem ser calculados independentemente uns dos outros. Conforme pode ser visto, através das expressões do apêndice, a matriz é cheia e o cálculo de cada elemento não é trivial, tornando assim extremamente alto o esforço computacional despendido no cálculo sequencial.

4. Implementação da Versão Paralela do Projeto de Aterramento

Paralelizar uma aplicação é distribuir o seu trabalho entre os processadores disponíveis. A construção do sistema de equações lineares, enfoque principal deste trabalho, que consiste basicamente na construção da matriz A, descrita no apêndice A, envolve tarefas com um alto grau de paralelismo, permitindo implementar diversas alternativas. É apresentada aqui uma versão paralela da construção da matriz A, que foi implementada utilizando a ferramenta CPAR.

4.1 A Ferramenta Cpar

Escolheu-se utilizar a ferramenta Cpar [3] [4], que oferece a linguagem Cpar, pois esta oferece construções de linguagem de programação paralela que facilitam a implementação. Na programação paralela existe um compromisso entre alto desempenho, facilidades de programação e portabilidade. Buscando o equilíbrio entre estes parâmetros, a linguagem Cpar foi projetada e implementada, visando oferecer construções simples para a exploração do paralelismo em múltiplos níveis, mantendo o alto desempenho das aplicações. É uma extensão da linguagem C baseada no paradigma de programação paralela com variáveis compartilhadas.

A linguagem Cpar oferece recursos para se implementar múltiplos níveis de paralelismo, através das múltiplas tarefas, denominadas *macrotarefas*, que podem ser executadas simultaneamente, e de blocos que também podem ser executados paralelamente e podem incluir múltiplas macrotarefas. Dentro de cada macrotarefa é possível implementar paralelismos internos com granularidades mais finas, através de laços paralelos especificados pelo comando *forall* e de blocos paralelos especificados pela construção *parbegin – parend*.

Um sistema de programação que oferece a linguagem Cpar foi desenvolvido para computadores paralelos com memória compartilhada e versões se encontram disponíveis para sistemas operacionais LINUX, SOLARIS. A versão para o sistema LINUX foi utilizada na implementação da aplicação aqui apresentada. Encontra-se em desenvolvimento versões para cluster de estações, simulando a memória compartilhada através de sistemas de memória compartilhada distribuída (dsm).

4.2 Paralelização entre os cálculos dos elementos da matriz A

Na construção da matriz A há uma total independência entre os cálculos de cada um dos seus elementos, permitindo a sua paralelização, como também há uma possibilidade de paralelizar internamente cada uma das funções que implementam cada um destes cálculos. Por outro lado, no cálculo de cada elemento, tem-se integrais em dois níveis, como pode ser verificado na montagem do sistema de equações, apresentado no apêndice A. O cálculo de integrais envolve uma quantidade de processamento que depende dos dados de entrada. Esta característica faz com que não exista uma homogeneidade na quantidade de processamento referente a cada função chamada no cálculo de cada elemento da matriz A.

A estrutura do programa é apresentada através de um trecho de código que procura descrever os pontos principais para a paralelização e a sua análise.

```
for cont1=1 to numero_elementos
{
  ...
  código seqüencial
  ...
  for cont2=1 to numero_elementos
    switch(id6) {
      case LINE0: switch(id7) {
        case LINE0: aij=function_1(data)
          ...
          aij+=function_1(data)
        case TRIANGLE0: aij=function_2(data)
          ...
          aij+=function_2(data)
      }
      case TRIANGLE0: switch(id7) {
        case LINE0: aij=function_1(data)
          ...
          aij+=function_1(data)
        case TRIANGLE0: aij=function_2()
          ...
          aij+=function_2()
      }
    }
  }
}
```

Considerando a heterogeneidade da quantidade de processamento entre as execuções das funções `function_1`, `function_2`, `function_3` e `function_4`, distinta para cada conjunto de dados passados como parâmetros, escolheu-se implementar um paralelismo no laço do nível mais interno, com controle através do contador `cont2`, e com escalonamento dinâmico das iterações [5]. Neste escalonamento, cada processador que finaliza uma iteração toma a próxima iteração a ser executada. Esta estratégia de paralelização provê uma distribuição balanceada de carga, que não seria obtida se fosse adotado o escalonamento estático, onde as iterações são distribuídas entre os processadores em blocos de tamanhos iguais, resultando em um ganho significativo de desempenho.

Utilizando os recursos programacionais oferecidos pela linguagem Cpar e tendo em vista o propósito de paralelizar internamente a construção da matriz A, escolheu-se implementar o algoritmo referente à construção da matriz A como uma macro-tarefa, a qual são alocados os múltiplos processadores de um computador paralelo com memória compartilhada. O paralelismo interno é implementado através do comando *forall* com a opção de escalonamento dinâmico *dsch*.

Tem-se a seguir a apresentação da paralelização efetuada, utilizando a linguagem Cpar e mostrando os pontos relevantes do módulo principal do programa relacionados ao paralelismo. As funções estão incluídas em outro módulo.

```
shared float A[1200][1200];
task spec constrA( );
task body constrA( )
{ for cont1=1 to numero_elementos
  ... código seqüencial ..
  forall cont2=1 to numero_processadores dsch /*dsch=escalonamento dinâmico*/
  {      ... código para cálculo ..
  }
}
.....
main( )
{ ....
  scanf("%d", &n); /* o usuário deve digitar o número de processadores */
  alloc_proc(n); /* define o número de processadores a serem utilizados */
  create  n, constrA( ); /*coloca em execução a macro tarefa constrA com n processadores */
}
```

5. Resultados e análise

Para avaliar e analisar a estratégia de paralelização proposta implementou-se a aplicação na versão paralela e seqüencial em uma máquina multiprocessadora Intel-Quad SC450NX MP, com quatro processadores Pentium II XEON – 400 MHz, usando o sistema operacional Red Hat Linux 6.2.

Para analisar o comportamento da aplicação utilizando a estratégia de paralelismo aqui apresentada, especialmente quanto ao aspecto do desempenho, utilizou-se dados, armazenado em arquivos de configuração, variando-se o tamanho da matriz A, como também o número de processadores utilizados.

A Tabela T.1 apresenta os resultados obtidos.

Tamanho de A	Seqüencial	2 proc.	3 proc.	4 proc.
50	T=65	T=33 S=1,97	T=23 S=2,82	T=21 S=3,09
100	T=163	T=82 S=1,99	T=56 S=2,91	T=50 S=3,26
200	T=658	T=330 S=1,99	T=225 S=2,92	T=198 S=3,32
300	T=1085	T=551 S=1,92	T=379 S=2,86	T=327 S=3,32

T.1: Tempo de execução (T em segundos) e ganho de desempenho (S):variando tamanho da matriz A e número de processadores

Analisando-se os resultados obtidos, conclui-se que a paralelização aumentou significativamente o desempenho da aplicação, e nota-se a escalabilidade quanto ao número de processadores e, principalmente, quanto ao tamanho da matriz. Com o aumento da matriz nota-se uma melhora

significativa no desempenho da aplicação, o que consiste em um aspecto extremamente relevante, visto que esta aplicação em projetos de aterramento, normalmente, utilizam matrizes de tamanho grande.

6. Conclusões

Os resultados obtidos mostram que o paralelismo é realmente uma boa alternativa para projetos de aterramentos encapsulados, e que a estratégia de paralelismo adotada se mostrou adequada para esta aplicação. Considerando-se que o projeto final do aterramento envolve a análise de diferentes configurações, e que para cada configuração é criado e solucionado um sistema de equações lineares, o aumento de desempenho na montagem da matriz A, provê a possibilidade de ser analisado um maior número de configurações e com maior número de elementos.

Bibliografia

- [1]VISACRO, S. F. Aterramentos Elétricos - Conceitos Básicos, Técnicas de Medição e Instrumentação e Filosofias de Aterramento. Alphagraphics, 1ª edição. 1997. Belo Horizonte.
- [2]VISACRO, S. F., RIBEIRO, H. A. Some evaluations concerning the performance of concrete-encased electrodes: an approach by the boundary elements. Proceedings of the International Conference on Grounding and Earthing, April 12-16, 1998, Belo Horizonte - Brazil.
- [3]SATO, L.M. Um Sistema de Programação e Processamento Paralelo para Sistemas Multiprocessadores. Proceedings do IV Simpósio Brasileiro de Arquitetura de Computadores-Processamento de Alto Desempenho, p.95-107, 1992,São Paulo – Brasil.
- [4]SATO, L.M. Ambientes de Programação para Sistemas Paralelos e Distribuídos. Tese de Livre-Docência – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Eletrônica. 1995.
- [5]POLYCHRONOPOULOS, C.D. Parallel Programming and Compilers. Kluwer Academic Publishers. 1989.

Apêndice A

Aterramento Encapsulado: Modelagem e Formulação do Problema

Os elementos básicos presentes no modelo dos aterramentos encapsulados estão ilustrados na Figura A -1: bloco de concreto retangular com um eletrodo cilíndrico em seu interior, enterrado no solo na posição horizontal. O fluxo de corrente elétrica em direção ao solo através do eletrodo condutor estabelece um campo elétrico no interior do bloco de concreto e na região próxima. O cômputo deste campo elétrico pode ser feito, por similaridade, através do posicionamento de elementos superficiais de carga elétrica equivalentes (às correspondentes correntes) sobre a superfície do eletrodo. Para ter em conta a presença do ar, é utilizada uma imagem do bloco (incluindo o eletrodo). A descontinuidade solo-concreto é considerada pelo posicionamento de outros elementos superficiais de carga elétrica equivalentes na superfície do bloco.

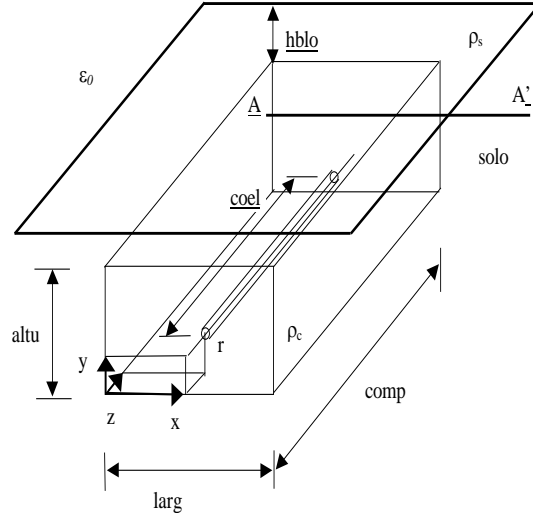


FIGURA A - 1
Configuração básica de aterramento

A equação A.1 expressa o valor do potencial V referido ao infinito, o qual é estabelecido no eletrodo pela passagem da corrente em direção ao solo:

$$V_i = V = \iint_S \frac{\eta_s ds}{4\pi\epsilon |\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad (A.1)$$

Nesta integral, S representa todas as superfícies com elementos de carga (superfície do eletrodo + interface concreto-solo), \vec{r} é a posição de um ponto em S cuja densidade de carga é η_s e \vec{r}_i é a posição de um ponto na superfície do eletrodo.

Devido à continuidade da corrente na superfície de separação situada entre o bloco de concreto e o solo, a seguinte relação pode ser observada:

$$J_{ns} = J_{nc} \rightarrow E_{ns} = \left(\frac{\rho_s}{\rho_c}\right) E_{nc} \quad (A.2)$$

onde J_{ns} é a componente normal da densidade de corrente no lado do solo, J_{nc} a componente no lado do concreto, E_{ns} e E_{nc} o campo elétrico correspondente e ρ_s e ρ_c as resistividades correspondentes respectivamente ao solo e ao concreto. Por outro lado, observa-se a condição de fronteira na superfície de separação entre o solo e o concreto:

$$D_{ns} - D_{nc} = \eta_{si} \quad (A.3)$$

onde D_{ns} é a indução elétrica no lado do solo, D_{nc} a indução no lado do concreto e η_{si} é a densidade superficial de carga no ponto \vec{r}_i localizado sobre a superfície de separação.

Substituindo a indução elétrica pelo campo elétrico, e observando a continuidade de corrente, tem-se:

$$\varepsilon_0(E_{ns} - E_{nc}) = \eta_{si} ; \varepsilon_0\left(\frac{\rho_s}{\rho_c}E_{nc} - E_{nc}\right) = \eta_{si} ; \varepsilon_0\left(\frac{\rho_s}{\rho_c} - 1\right)E_{nc} = \eta_{si} ; \quad (A.4)$$

$$\left(\frac{\rho_s}{\rho_c} - 1\right)\varepsilon_0 \iint_S \frac{\eta_s(\vec{r}_i - \vec{r}) \cdot \vec{n}_i}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} ds = \eta_{si} \quad . \quad (A.5)$$

Estas são as equações básicas que descrevem o problema. A solução do mesmo consiste em se determinar a função η_s que atende às equações. A partir da solução encontrada, calcula-se o campo elétrico na superfície do eletrodo. Dividindo-se o valor do campo pela resistividade do concreto, obtém-se a densidade de corrente, e integrando esta densidade sobre a superfície do eletrodo determina-se a corrente total que flui para o solo. Este valor, juntamente com o valor do potencial, permite calcular a resistência de aterramento da configuração. Além disso, pode-se utilizar a mesma equação (A.1) para calcular o potencial em pontos situados na superfície do solo.

Uso de fontes de carga

O fluxo de corrente elétrica em direção ao solo através do eletrodo condutor estabelece uma distribuição de campo elétrico na região de concreto e no solo, determinando um valor de potencial para o eletrodo (referido a um ponto muito distante no solo). Para calcular este campo, a corrente que flui ao longo de toda superfície do eletrodo é aproximada por fontes lineares de corrente, posicionadas no eixo do eletrodo (em A/m). Elas constituem as variáveis independentes do problema. Nesta abordagem, as fontes lineares são substituídas por fontes superficiais de carga (em C/m²). Tal substituição apresenta como vantagem a drástica redução do número de imagens necessárias para computar a presença do ar e do concreto, em relação ao emprego de fontes lineares de corrente. É necessário considerar somente uma imagem, para computar a presença do ar. Por outro lado, cada interface de mudança de meio (exceto a interface ar-solo) deve ser modelada por superfícies de carga adicionais (neste caso, a interface bloco de concreto-solo).

Uma fonte de corrente linear, de comprimento L , com densidade linear de corrente igual a I_L A/m está no eixo de um segmento de eletrodo de mesmo comprimento e raio r . Esta gera uma densidade de corrente igual a $I_L/2\pi r$ (A/m²) na superfície do eletrodo. O campo elétrico normal a esta superfície é dado por $E_n = \rho_c I_L/2\pi r$. Como $\eta_s = \varepsilon_0 E_n$, o valor de I_L pode ser calculado a partir de η_s pela seguinte expressão:

$$I_L = \frac{2\pi r}{\rho_c \varepsilon_0} \eta_s \quad . \quad (A.6)$$

I_L e η_s são considerados constantes ao longo do comprimento do segmento de eletrodo. A composição de vários segmentos forma um eletrodo, cada qual com um valor de I_L independente. A não uniformidade na distribuição da corrente ao longo do eletrodo é modelada pelos diferentes valores de I_L dos segmentos.

Montagem do sistema de equações

As superfícies de carga representadas por S em (A.1) e (A.5) são divididas em pequenas superfícies de carga S_i , cada qual com um η_{si} associado. O potencial no segmento S_i pode ser calculado como a soma das contribuições individuais de cada pequena superfície:

$$V_i = \iint_{S_1} \frac{\eta_{s_1} ds}{4\pi\epsilon|\vec{r}_1 - \vec{r}_i|} + \iint_{S_2} \frac{\eta_{s_2} ds}{4\pi\epsilon|\vec{r}_2 - \vec{r}_i|} + \dots + \iint_{S_n} \frac{\eta_{s_n} ds}{4\pi\epsilon|\vec{r}_n - \vec{r}_i|} \quad (\text{A.7})$$

$$V_i = \eta_{s_1} \cdot \iint_{S_1} \frac{ds}{4\pi\epsilon|\vec{r}_1 - \vec{r}_i|} + \eta_{s_2} \cdot \iint_{S_2} \frac{ds}{4\pi\epsilon|\vec{r}_2 - \vec{r}_i|} + \dots + \eta_{s_n} \cdot \iint_{S_n} \frac{ds}{4\pi\epsilon|\vec{r}_n - \vec{r}_i|} \quad (\text{A.8})$$

$$V_i = \eta_{s_1} \cdot A_{i1} + \eta_{s_2} \cdot A_{i2} + \dots + \eta_{s_n} \cdot A_{in} \quad (\text{A.9})$$

Levando em conta a mesma discretização, porém agora na condição de fronteira expressa em (A.4), tem-se:

$$\begin{aligned} \eta_{s_i} = & \eta_{s_1} \cdot \left(\frac{\rho_s}{\rho_c} - 1\right) \iint_{S_1} \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_1) \cdot \vec{n}_i}{4\pi|\vec{r}_1 - \vec{r}_i|^3} ds + \dots \\ & \dots + \eta_{s_i} \cdot \left(\frac{\rho_s}{\rho_c} - 1\right) \iint_{S_2} \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}) \cdot \vec{n}_i}{4\pi|\vec{r}_2 - \vec{r}_i|^3} ds + \dots \\ & \dots + \eta_{s_n} \cdot \left(\frac{\rho_s}{\rho_c} - 1\right) \iint_{S_n} \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_n) \cdot \vec{n}_i}{4\pi|\vec{r}_n - \vec{r}_i|^3} ds ; \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$0 = A_{i1} \cdot \eta_{s_1} + \dots + (A_{ii} - 1) \cdot \eta_{s_i} + \dots + A_{in} \cdot \eta_{s_n} \quad (\text{A.11})$$

Aplicando estas equações para cada elemento de S, é possível compor um sistema de equações lineares, expresso na forma matricial, cuja solução fornece o valor das densidades de carga (e correspondentes valores de densidade de corrente) e, logo, a resistência de aterramento e o potencial na superfície do solo:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_n \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & \dots & (A_{nn} - 1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \dots \\ \eta_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$